

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ
УДК 519.216.1



Элементы комбинаторики, теории вероятности и статистики, как средство формирования критического мышления

Наталья Юрьевна МАРКИНА ✉

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
✉ tankmart0033@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются проблемы и поиск оптимальной методики обучения школьников теории вероятности, комбинаторике и статистике. Выявлены основы прикладной направленности в обучении теории вероятности, комбинаторике и статистике. На этой основе разработано учебно-методическое обеспечение данного раздела математики для обучения школьников среднего и старшего звена. Доказано, что подобный методический подход формирует критическое мышление обучаемых.

Ключевые слова: комбинаторика, теория вероятности, статистика, критическое мышление

Для цитирования: Маркина Н.Ю. Элементы комбинаторики, теории вероятности и статистики, как средство формирования критического мышления // Державинский форум. 2025. Т. 9. № 1. С. 135-140.

ORIGINAL ARTICLE
UDC 519.216.1

Combinatorics elements, probability theory and statistics as a means of forming critical thinking

Natalia Yu. MARKINA ✉

Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov, 392000, Russian Federation
✉ tankmart0033@yandex.ru

Abstract. This study examines the problems and the search for optimal methods of teaching students probability theory, combinatorics and statistics. The fundamentals of applied orientation in teaching probability theory, combinatorics and statistics are revealed. On this basis, the educational and methodological support of this mathematics section has been developed for teaching middle and senior school students. It is proved that such a methodical approach forms the critical thinking of students.

Keywords: combinatorics, probability theory, statistics, critical thinking

For citation: Markina, N.Yu. (2025). Combinatorics elements, probability theory and statistics as a means of forming critical thinking. *Derzhavinskii forum = Derzhavin Forum*, vol. 9, no. 1, pp. 135-140.

ВВЕДЕНИЕ

Когнитивные процессы у подростков усложняются в процессе взросления. Проявляется тенденция к углублению критического мышления и формированию обоснованных суждений. В этом возрасте школьники способны генерировать разнообразные идеи и эффективно переключаться между различными категориями событий, что является показателем развития гибкости мышления. В современном мире от людей требуется способность адекватно анализировать окружающую реальность, существующие системы взглядов и ценностей, а также производить различного рода прогнозы. Ключевой компонент интеллектуальной активности человека заключается в умении проводить вероятностное прогнозирование, что предполагает анализ текущей информации с учетом прошлых опытов для составления предположений о будущих событиях с определением их вероятности. Такой тип мышления позволяет предвосхищать потенциальные направления развития событий и результаты действий, иными словами, осуществлять «моделирование» вероятностной структуры мира для адекватного взаимодействия с ним.

Включение в школьную программу элементов теории вероятности является одним из отличных инструментов для формирования компетенций, необходимых для успешного человека. Одной из таких компетенций является формирование критического мышления, мышления, характерного для думающего, рассуждающего человека. В теории вероятности нет задач по шаблону, все задачи, как правило, нестандартные, поэтому многим школьникам они даются с трудом, но благодаря такому подходу к обучению формируются навыки успешного человека. При этом достигается цель обучения, которая состоит в том, чтобы помочь выра-

стить современного, конкурентоспособного, творческого индивида, подготовленного ко всему многообразию меняющихся жизненных факторов и освоившего систему творческого мышления для адаптации и трансформации получаемой информации для эффективного оперирования многообразием данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе приведены примеры различных групп задач, интеграция которых в процесс обучения наряду с другими инструментариями педагогики приводит к получению требуемых результатов в формировании навыков обучаемого объекта.

Проведем анализ проблемы и методы их устранения.

1. Встретились 17 спортивных личностей, включая 11 футболистов и 6 хоккеистов, которые решили вспомнить детские игры, выбрав шашки, долго не трогавшиеся ими. Итак, сколько партий произошло:

- а) между футболистами;
- б) между хоккеистами;
- в) между игроками в футбол и хоккей;
- г) всего?

Все вопросы, начинающиеся с фраз «сколькими методами» или «каково количество...», принадлежат к области математики, известной как комбинаторика.

В комбинаторике используют формулы, в данной задаче мы используем формулу сочетания без повторений:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

А также понятие факториала.

Факториал – это уникальная математическая функция, которая умножает все натуральные числа от 1 до n , включая n . Это обозначается как $n!$, где n – отрицательное число: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. Например, для 5, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Решение:

а) Всего 11 футболистов, $n = 11$. Партия в шашки разыгрывается между двумя игроками, $m = 2$.

$$C_{11}^2 = \frac{11!}{2! \cdot (11-2)!} = 55.$$

Ответ: 55.

б) Аналогично 6 хоккеистов, $n = 6$, $m = 2$.

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = 15.$$

Ответ: 15.

в) Используя правило умножения в комбинаторике, находим:

$$C_{11}^1 \cdot C_6^1 = \frac{11!}{1! \cdot (11-1)!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot (6-1)!} = 66.$$

Ответ: 66.

г) Всего хоккеистов и футболистов:
 $n = 11 + 6 = 17$;

$$C_{17}^2 = \frac{17!}{2! \cdot (17-2)!} = 136.$$

Ответ: 136.

2. В правильном семнадцатиугольнике выполнена чертежная работа по проведению всех его сторон и диагоналей.

а) Сколько провели сторон?

б) Какое общее количество линейных сегментов было проведено?

в) Сколько провели диагоналей?

г) Количество диагоналей в выпуклом многоугольнике с n вершинами.

Решение:

В данной задаче будем использовать формулу сочетания без повторов:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

а) В правильном 17-угольнике количество сторон совпадает с количеством углов.

Ответ: 17.

б) Всего 17 вершин. Каждые две соединены между собой, образуя тем самым отрезок. Имеем сочетание по 2 из 17, $n = 17$, $m = 2$.

$$C_{17}^2 = \frac{17!}{2! \cdot (17-2)!} = 136.$$

Ответ: 136.

в) Сколько провели диагоналей?

Так как 7 отрезков – это стороны многоугольника то можно найти:

$$C_{17}^2 - 7 = 136 - 17 = 119.$$

Ответ: 119.

$$г) C_n^2 - n = \frac{(n-1) \cdot n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{n(n-3)}{2}.$$

3. Несколько человек собрались вместе и начали обмениваться приветствиями через рукопожатия. Установлено, что количество этих рукопожатий находилось в диапазоне от 60 до 70. Каков же был численный состав группы, учитывая, что:

а) каждый здоровался с каждым;

б) исключительно один индивид не обменивался приветствиями с окружающими;

в) между двумя людьми приветствия не произошло;

г) четыре человека обменялись приветствиями исключительно внутри своей группы.

Решение:

а) Пусть количество человек x , тогда рукопожатий каждого было $(x-1)$. Всего рукопожатий:

$$\frac{(x-1) \cdot x}{2},$$

$$60 < \frac{(x-1) \cdot x}{2} < 70,$$

$$120 < (x-1) \cdot x < 140, x \in N,$$

$$x = 12.$$

Ответ: 12.

$$б) x = 12$$

$$12 + 1 = 13.$$

Ответ: 13.

$$в) 60 < \frac{(x-1) \cdot x}{2} - 1 < 70,$$

$$61 < \frac{(x-1) \cdot x}{2} < 71,$$

$$122 < (x-1) \cdot x < 142, x \in N,$$

$$x = 12.$$

Ответ: 12.

г) C_4^2 – четверо поздоровались между собой,

$$C_4^2 = 6,$$

$$60 < C_{n-4}^2 < 70,$$

$$60 < \frac{(n-4)(n-5)}{2} < 70,$$

$$n = 15.$$

Ответ: 15.

4. Имеет ли значение последовательность в приведенных ниже выборах:

а) главный игрок волейбольного коллектива и его ассистент;

б) три ноты в аккорде;

в) шестеро студентов возьмут на себя ответственность за уборку аудитории;

г) два эпизодических блока из сериала.

а) Ответ: да.

б) Ответ: нет.

в) Ответ: нет.

г) Ответ: да.

5. Вычислите:

а) C_{17}^2 ; б) C_{100}^2 ; в) C_5^3 ; г) C_8^4 .

Решение:

$$а) C_{17}^2 = \frac{17!}{2!(17-2)!} = 136;$$

$$б) C_{100}^2 = \frac{100!}{2!(100-2)!} = 4950;$$

$$в) C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10;$$

$$г) C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70.$$

6. Вычислите:

а) $C_{27}^2 - C_{26}^2$; б) $C_{11}^5 + C_{11}^6$; в) $C_5^2 + C_7^2 + C_9^2$; г) C_n^k при $n = 1, 2, 3, 4$ и $0 \leq k \leq n$.

Решение:

$$а) C_{27}^2 - C_{26}^2 = \frac{27!}{2!(27-2)!} - \frac{26!}{2!(26-2)!} = 26;$$

$$б) C_{11}^5 + C_{11}^6 = \frac{11!}{5!(11-5)!} + \frac{11!}{6!(11-6)!} = 924;$$

$$в) C_5^2 + C_7^2 + C_9^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} + \frac{7!}{2!(7-2)!} + \frac{9!}{2!(9-2)!} = 74;$$

г) C_n^k при $n = 1, 2, 3, 4$ и $0 \leq k \leq n$.

7. а) Создайте таблицу с двумя рядами, в первом ряду разместите числа k в диапазоне от 0 до 5, а во втором ряду – соответствующие значения комбинаторных чисел C из 5 по k . C_5^k

б) При каком значении k вторая строка примет максимальное значение?

в) Вычислите алгебраическую сумму значений, расположенных во втором ряду.

а)						
k	0	1	2	3	4	5
C_5^k	1	5	10	10	5	1

б) $k = 2; 3$.

в) $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$.

8. Составьте частное двух чисел, выясните, что больше:

а) C_{17}^3 или C_{17}^4 ;

б) C_{18}^4 или C_{19}^5 ;

в) C_{19}^5 или C_{18}^6 ;

г) C_n^7 или C_{n+1}^8 .

Решение:

$$а) \frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{3!} < \frac{14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{4 \cdot 3!};$$

$$б) \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{4!} < \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}{5!};$$

$$в) \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}{5!} > \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{5! \cdot 6};$$

$$г) \frac{n!}{7! \cdot (n-7)!} \text{ или } \frac{(n+1)!}{7! \cdot 8(n-7)!}.$$

Если $n < 7$, тогда

$$\frac{n!}{7! \cdot (n-7)!} > \frac{(n+1)!}{7! \cdot 8(n-7)!}.$$

Если $n = 7$, тогда

$$\frac{n!}{7! \cdot (n-7)!} = \frac{(n+1)!}{7! \cdot 8(n-7)!}.$$

Если $n > 7$, тогда

$$\frac{n!}{7! \cdot (n-7)!} < \frac{(n+1)!}{7! \cdot 8(n-7)!}.$$

9. Проверьте, что $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3$.

Решение:

$$\begin{aligned} (a+b) (a+b) (a+b) &= \frac{3!}{0!(3-0)!} a^3 b^0 + \frac{3!}{1!(3-1)!} a^2 b^1 + \frac{3!}{2!(3-2)!} a^1 b^2 + \frac{3!}{3!(3-3)!} a^0 b^3 \\ &= (a^2 + ab + ba + b^2) (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 \\ &= a^3 + 2a^2b + b^2a + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 \end{aligned}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3.$$

Ответ: равенство верное.

10. «Богом вороне достался кусочек сыра», брынзы, деликатесной колбасы, аппетитного сухаря и вкуснейшего шоколада. «На ветках еле устроившись, ворона к приему пищи готовилась, но в раздумья погрузилась»:

а) Каково количество возможных вариантов выбора при наличии элементов, предоставляемых последовательно?

б) Какое количество «сэндвичей» можно создать, используя два куска?

в) Если употребить три куска сразу, скрыв оставшиеся, каков будет выбор из доступных опций?

г) Сколько получится, если какой-то кусочек бросить Лисе, а потом ответить на вопрос а)?

Решение:

а) Всего у вороны 5 вариантов различных угощений. Здесь целесообразно применить формулу количества перестановок: $P = n!$.

$$P = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Ответ: из 120 вариантов.

б) Применяем формулу сочетания, где $n = 5$, а $m = 2$.

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10.$$

Ответ: 10 бутербродов.

в) Выбор три из пяти кусочков. Применим формулу сочетания.

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10.$$

Это количество может сочетаться с двумя различными вариантами:

$$10 \cdot 2 = 20.$$

Ответ: из 20 вариантов.

г) Если один кусочек бросить лисе, то выбирать придется из 4 вариантов.

$$P = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Ответ: из 24 вариантов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Умение критически мыслить, логически рассуждать – необходимые навыки в современном мире, которые формируются в течение всей жизни. Комбинаторика, теория вероятностей и статистика – это области математики, где нет универсальных решений. Каждое задание имеет свои особенности, что требует от учащихся уникального подхода. Эти дисциплины развивают логическое и критическое мышление, способствуя формированию математической грамотности. Задачи, возникающие в этих областях, развивают вычислительные и аналитические навыки, что позволяет учащимся находить нестандартные решения.

Список источников

1. Галямова Э.Х. Практикум по теории и методике обучения математике в средней школе. Набережные Челны: Набережночелн. гос. пед. ун-т, 2008. 51 с. <https://doi.org/10.23682/64636>, <https://elibrary.ru/zgkitb>
2. Горев П.М. Приобщение к математическому творчеству: дополнительное математическое образование. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2012. 165 с. <https://elibrary.ru/rvpudx>
3. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. Москва: Дрофа, 2007. 666 с.
4. Дрозина В.В., Дильман В.В. Механизм творчества решения нестандартных задач. Для тех, кто хочет решать нестандартные задачи. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 255 с. <https://elibrary.ru/sfjtrv>

References

1. Galyamova E.Kh. (2008). *A Workshop on the Theory and Methodology of Teaching Mathematics in Secondary School*. Naberezhnye Chelny, Naberezhnye Chelny State Pedagogical Institute Publ., 51 p. (In Russ.) <https://doi.org/10.23682/64636>, <https://elibrary.ru/zgkitb>
2. Gorev P.M. (2012). *Introduction to Mathematical Creativity: Additional Mathematical Education*. Saarbrücken, Lambert Academic Publ., 165 p. (In Russ.) <https://elibrary.ru/rvpudx>
3. Dorofeev G.V., Potapov M.K., Rozov N.Kh. (2007). *A Handbook of Mathematics for University Applicants*. Moscow, Drofa Publ., 666 p. (In Russ.)
4. Drozina V.V., Dil'man V.V. (2008). *The Mechanism of Creative Solutions to Non-Standard Tasks. For Those Who Want to Solve Non-Standard Tasks*. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy Publ., 255 p. (In Russ.) <https://elibrary.ru/sfjtrv>

Информация об авторе

Маркина Наталия Юрьевна, магистрант по направлению подготовки «Математика (преподавание математики и информатики)», Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, tankmart0033@yandex.ru

Information about the author

Natalia Yu. Markina, Master's Degree Student in "Mathematics (Teaching Mathematics and Informatics)" Program, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation, tankmart0033@yandex.ru

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 29.10.2024

Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 01.12.2024

Принята к публикации / Accepted for publication 03.03.2025